Nümerik Analize Giriş Ara Sınav Soruları Çözümleri

1) $(x_i, f(x_i))$, $i=0,1,2,\dots,7$ ayrık noktalarında interpole eden interpolasyon polinomu $P_7(x_i)=f(x_i)$ $i=0,1,2,\dots,7$ eşitliğini sağlayan

$$P_7(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_7x^7$$

polinomudur.

$P_7(x_i)=f(x_i)$ $i=0,1,2,\dots,7$ eşitliğinden

$$\left.\begin{aligned} P_7(x_0)&=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\dots+a_7x_0^7=f(x_0)\\ P_7(x_1)&=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\dots+a_7x_1^7=f(x_1)\\ &\vdots\\ P_7(x_7)&=a_0+a_1x_7+a_2x_7^2+\dots+a_7x_7^7=f(x_7)\end{aligned}\right\}\ (*)$$

şeklinde $a_0,a_1,a_2,\dots,a_7$ bilinmeyenlerine homojen olmayan lineer denklem sistemi elde edilir.

$$w(x)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^7\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^7\\ \vdots & & & & \vdots\\ 1 & x_7 & x_7^2 & \cdots & x_7^7\end{vmatrix}\neq 0$$ olduğundan $(*)$ denklem

sisteminin çözümü Cramer yöntemi yardımıyla

$$a_0=\frac{1}{w(x)}\begin{vmatrix} f(x_0) & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^7\\ f(x_1) & x_1 & x_1^2 & & x_1^7\\ \vdots & & & & \\ f(x_7) & x_7 & x_7^2 & & x_7^7\end{vmatrix},\quad a_1=\frac{1}{w(x)}\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) & x_0^2 & \cdots & x_0^7\\ 1 & f(x_1) & x_1^2 & & x_1^7\\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & f(x_7) & x_7^2 & \cdots & x_7^7\end{vmatrix}$$

$$a_2=\frac{1}{w(x)}\begin{vmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) & \cdots & x_0^7\\ 1 & x_1 & f(x_1) & \cdots & x_1^7\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_7 & f(x_7) & \cdots & x_7^7\end{vmatrix},\ \dots,\ a_7=\frac{1}{w(x)}\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & f(x_0)\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & f(x_1)\\ \vdots & & & & \\ 1 & x_7 & x_7^2 & \cdots & f(x_7)\end{vmatrix}$$

olur.

a) $P_7(x)$ 7 inci dereceden olması için $a_7 \neq 0$ olmalıdır. Yani $(x_i, f(x_i))$ $i=0,1,\ldots,7$ ayrık noktalarını öyle seçelim ki

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & f(x_1) \\ \vdots \\ 1 & x_7 & x_7^2 & \cdots & f(x_7) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ olsun.}$$

Bunun için özel $f(x_i) = x_i^7$, $i=0,1,2,\ldots,7$ alınırsa bu determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^7 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^7 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_7 & x_7^2 & \cdots & x_7^7 \end{vmatrix} = w(x) \neq 0 \text{ olur.}$$

(2)

b) $P_7(x)$ in 2 dereceden olması için $a_2 \neq 0$ ve $a_3=0$, $a_4=0$, $a_5=0$, $a_6=0$, $a_7=0$ olmalıdır.

Yani a_2 nin eşiti olan ifadede

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) & \cdots & x_0^7 \\ 1 & x_1 & f(x_1) & \cdots & x_1^7 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_7 & f(x_7) & \cdots & x_7^7 \end{vmatrix} \neq 0$$

ve $a_i = 0$, $i=3,4,5,6,7$ olmalıdır.

Bunun için $(x_i, f(x_i))$ $i=0,1,2,\ldots,7$ ayrık noktalarını $f(x_i) = x_i^2$, $i=0,1,2,\ldots,7$ şeklinde alınırsa yukarıdaki determinant $w(x)$ olur ve $w(x) \neq 0$ oldığından $a_2 \neq 0$ olur. $i=3,4,5,6,7$ için a_i katsayılarının eşiti olan determinantlar, ($i+1$ inci sütunlar 3 üncü sütuna eşit olduğundan) sıfır olduğundan $a_i = 0$ olur.

c) $P_7(x)$ in 1. dereceden olması için $a_1 \neq 0$, $a_i = 0$
$i = 2, 3, \ldots, 7$ olmalıdır. Bunun için a_1 in eşiti olan ifadede

$$\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) & x_0^2 & \cdots & x_0^7 \\ 1 & f(x_1) & x_1^2 & & x_1^7 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & f(x_7) & x_7^2 & & x_7^7 \end{vmatrix} \neq 0$$

olmalıdır. Eğer $f(x_i) = x_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 7$ alınırsa bu determinant $w(x)$ eşit olur. $w(x) \neq 0$ olduğundan $a_1 \neq 0$ olur. Diğer taraftan $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ için a_i katsayıları ise bu katsayıların eşiti olan ifadelerdeki determinantlar ($i+1$ inci sütunlar 2. sutuna eşit olduğundan) sıfır olduğundan $a_i = 0$ olur.

(3)

d) $P_7(x)$ in sıfırıncı dereceden olması için $a_0 \neq 0$, $a_i = 0$
$i = 1, 2, \ldots, 7$ olmalıdır. Eğer a_0 ifadesinin eşitindeki determinantta $f(x_i) = 1$, $i = 0, 1, \ldots, 7$ alınırsa determinan $w(x)$ e eşit olur. $w(x) \neq 0$ olduğundan $a_0 \neq 0$ olur. $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ katsayılarının eşiti olduğu determinantlarda, $i = 1, 2, \ldots, 7$ için $i+1$ inci sütunlar 1. sütuna eşit olduğundan sıfırdır.
yani $a_i = 0$ olur.

2) Newton ileri fark int. polinomu ile Lagrange int. polinomlarının birbirlerine eşit olduklarını gösterelim.

Newton ileri fark int polinom

$$P_n(x) = f_0 + (x-x_0)\frac{\Delta f_0}{h} + (x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta^2 f_0}{2.h^2} + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{\Delta^3 f_0}{3!\,h^3} + \cdots +$$

$$(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\frac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n}$$ dir

Lagrange int. polinomu ise

$$P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}f(x_1) + \cdots +$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}f(x_n)$$ dir.

Newton ileri fark int polinomundan Lagrange int. polinomunu elde edelim. (Tersi de gösterilebilir)

Bunun için

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{h^n n!} \quad \text{ve} \quad f[x_0,x_1,\ldots,x_n] = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{l=0\\ j\neq l}}^{n}(x_j-x_l)}$$

eşitlerinden

$$\frac{\Delta^n f_0}{h^n n!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{l=0\\ j\neq l}}^{n}(x_j-x_l)}$$ olur. Bu eşitliği Newton ileri fark

interpolasyon polinomunda kullanırsak, yani

$$n=1 \quad \frac{\Delta f_0}{h} = \sum_{j=0}^{1}\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{l=0}(x_j-x_l)} = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)}$$

$$n=2, \quad \frac{\Delta^2 f_0}{h^2\,2} = \sum_{j=0}^{2}\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{l=0\\ j\neq l}}(x_j-x_l)} = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

2) nin devamı

Benzer şekilde devam edilirse

n=n için
$$\frac{\Delta^n f_0}{h^n n!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{l=0\\ l\neq j}}^{n}(x_j-x_l)}$$

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\cdots(x_0-x_n)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}$$

$$+\cdots+ \frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

olur. Bu değerler Newton ileri fark interpolasyon polinomunda yerlerine yazılır ve $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ göre düzenlenirse

$$P_n(x) = \left(1 + \frac{x-x_0}{x_0-x_1} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}\right) f(x_0)$$

$$+\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}\right) f(x_1)$$

$$+\cdots+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})} f(x_n)$$

olur. $f(x_0)$ katsayısını hesaplayalım.

$$= \underbrace{1 + \frac{x-x_0}{x_0-x_1}} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$

$$= \underbrace{\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}}$$

$$= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \cdots$$

$$\underbrace{\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}}$$

(Paydaları eşitle $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$ parantezine alınırsa)
$$= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})(x_0-x_n)}$$
bulunur.

Benzer işlemler $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ katsayıları için de yapılırsa

$$P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} f(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\cdots(x_0-x_{n-1})} f(x_n)$$
Lagrange polinomu bulunmuş olur.

3) $x_i \in [-\sqrt{2}, -1]$ olmak üzere $f(x)=x^3$ için

a) Birinci derece int. polinomu ayrık noktalar $x_0=-\sqrt{2}$, $x_1=-1$ olmak üzere $f(x_0)=f(-\sqrt{2})=-2^{3/2}$, $f(x_1)=f(-1)=(-1)^3=-1$ dir. Buna göre Lagrange int. polinomu kullanılırsa

$P_1(x)=C_0(x)f(x_0)+C_1(x)f(x_1)$ den $P_1(x)=\dfrac{x+1}{-\sqrt{2}+1}(-2)^{3/2}+\dfrac{x+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}(-1)$ olur.

b) ikinci dereceden int. polinomu, $x_0=-\sqrt{2}$, $x_1=-\sqrt{1,5}$, $x_2=-1$ alınırsa $f(x_0)=f(-\sqrt{2})=-2^{3/2}$, $f(x_1)=f(-\sqrt{1,5})=-(1,5)^{3/2}$, $f(x_2)=-1$ dir. Buna göre Lagrange int polinomu

$P_2(x)=C_0(x)f(x_0)+C_1(x)f(x_1)+C_2(x)f(x_2)$ dir.

$$P_2(x)=\frac{(x+\sqrt{1,5})(x+1)}{(-\sqrt{2}+\sqrt{1,5})(-\sqrt{2}+1)}\left(-2^{3/2}\right)+\frac{(x+\sqrt{2})(x+1)}{(-\sqrt{1,5}+\sqrt{2})(-\sqrt{1,5}+1)}\left(-(1,5)^{3/2}\right)+\frac{(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{1,5})}{(-1+\sqrt{2})(-1+\sqrt{1,5})}(-1)$$ ol

c) Dördüncü dereceden int. polinomu için ise
$x_0=-\sqrt{2}$, $x_1=-\sqrt{1,7}$, $x_2=-\sqrt{1,5}$, $x_3=-\sqrt{1,3}$ $x_4=-1$ ayrık noktaları alınabilir. ($x_0<x_1<x_2<x_3<x_4$ dir) Ayrık noktalar eşit uzaklık olmadığından Lagrange int. polinomu kullanılır. $P_4(x)=\sum_{i=0}^{4} C_i(x)f(x_i)$ dir. Yani

$$P_4(x)=\frac{(x+\sqrt{1,7})(x+\sqrt{1,5})(x+\sqrt{1,3})(x+1)}{(-\sqrt{2}+\sqrt{1,7})(-\sqrt{2}+\sqrt{1,5})(-\sqrt{2}+\sqrt{1,3})(-\sqrt{2}+1)}\left(-2^{3/2}\right)$$

$$+\frac{(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{1,5})(x+\sqrt{1,3})(x+1)}{(-\sqrt{1,7}+\sqrt{2})(-\sqrt{1,7}+\sqrt{1,5})(-\sqrt{1,7}+\sqrt{1,3})(-\sqrt{1,7}+1)}\left(-(1,7)^{3/2}\right)+\frac{(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{1,7})(x+\sqrt{1,3})(x+1)}{(-\sqrt{1,5}+\sqrt{2})(-\sqrt{1,5}+\sqrt{1,7})(-\sqrt{1,5}+\sqrt{1,3})(-\sqrt{1,5}+1)}\left(-(1,5)^{3/2}\right)$$

$$+\frac{(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{1,7})(x+\sqrt{1,5})(x+1)}{(-\sqrt{1,3}+\sqrt{2})(-\sqrt{1,3}+\sqrt{1,7})(-\sqrt{1,3}+\sqrt{1,5})(-\sqrt{1,3}+1)}\left(-(1,3)^{3/2}\right)+\frac{(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{1,7})(x+\sqrt{1,5})(x+\sqrt{1,3})}{(-1+\sqrt{2})(-1+\sqrt{1,7})(-1+\sqrt{1,5})(-1+\sqrt{1,3})}(-1)$$

olur. b) şıkkı için $n=2$ old. dan $a=-\sqrt{2}$, $b=-1$ olmak üzere $h=\dfrac{b-a}{n} \Rightarrow h=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$ olur. $x_0=-\sqrt{2}$, $x_1=-\sqrt{2}+\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}=\dfrac{-\sqrt{2}-1}{2}$, $x_1=-1$

c) şıkkı içinde $n=4$ olduğu $h=\dfrac{b-a}{4} \Rightarrow h=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{4}$ olur. Böylece ayrık noktalar $x_0=-\sqrt{2}$, $x_1=\dfrac{-3\sqrt{2}-1}{4}$, $x_2=\dfrac{-2\sqrt{2}-2}{4}=\dfrac{-\sqrt{2}-1}{2}$, $x_3=\dfrac{-\sqrt{2}-3}{4}$, $x_4=-1$ olur.
Bunlar için Newton sonlu fark int. polinomu kullanılmalıdır.

4) $x-5^{-x}=0$ denkleminin kökünü $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=1$ ayrık noktalarına göre bulunuz.

$f(x)=x-5^{-x}$ fonk monoton old.dan ters interpolasyon yardımıyla $f(x^*)\approx 0$ olacak şekilde $x=x^*$ kökü bulunabilir. Bunun için $y=f(x)$ olmak üzere $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$ old.dan $x_0=f^{-1}(y_0)$, $x_1=f^{-1}(y_1)$, $x_2=f^{-1}(y_2)$ olur. Yani ayrık noktalar fonk değeri, fonksiyon değerleri ayrık nokta alınmalıdır. Buna göre

$y_0=f(-1)=-1-5^{-(-1)}=-6$, $y_1=f(0)=0-5^0=-1$, $y_2=f(1)=1-5^{-1}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ olur

y_i	-6	-1	$\frac{4}{5}$
x_i	-1	0	1

olur. y_i ler eşit aralıklı olmadığından Lagrange int. pol. kullanılır.

$$P_2(y)=\frac{(y+1)(y-4/5)}{(-6+1)(-6-4/5)}\cdot(-1)+\frac{(y+6)(y-4/5)}{(-1+6)(-1-4/5)}\cdot 0+\frac{(y+6)(y+1)}{(\frac{4}{5}+6)(\frac{4}{5}+1)}\cdot 1 \text{ olur}$$

$y=f(x)$ de $y=0$ için $0=f(x^*)$ old.dan $P_2(0)\approx x^*$ olur.

O halde $$x^*\approx P_2(0)=\frac{1\cdot(-\frac{4}{5})}{-5\cdot -\frac{34}{5}}(-1)+\frac{6\cdot 1}{\frac{34}{5}\cdot\frac{9}{5}}\,1=\frac{\cancel{4}^{\,2}}{5\cdot\cancel{34}_{\,17}}+\frac{\cancel{6}^{\,2}\cdot 25}{\cancel{34}_{\,17}\cdot\cancel{9}_{\,3}}$$

$$x^*\approx\frac{2\cdot 3+25\cdot 5}{3\cdot 5\cdot 17}=\frac{6+125}{15\cdot 17}=\frac{131}{255}\approx 0{,}513$$ olur. Gerçekten

x_i	-1	0	$\overset{0,513}{x^*}$	1
y_i	-6	-1	0	$4/5$

yani $0<0{,}513<1$ ve $-1<0<4/5$ dir.